TD 17 : Relations binaires

Relations d'équivalences

1 ★ On définit sur $\mathbb{R}$ la relation

$$x\mathcal{R}y \iff |x-y| \leq 1$$

1) Vérifier si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Est-ce une relation d'équivalence ?
2) Mêmes questions avec

$$x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

2 ★☆ On définit sur $\mathbb{R}$ la relation

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

3 ★★☆ Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$X\mathscr{R}Y \iff X \cup A = Y \cup A$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathscr{P}(E)$.

4 ★★★ On définit une relation binaire $\sim$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :

$$u \sim v \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p, q \geq n \quad u_p \leq v_n \text{ et } v_q \leq u_n$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Relations d'ordre

5 ★☆ On considère sur $\mathbb{R}$ la relation suivante :

$$x \preceq y \iff e^{-x} \leq e^{-y}$$

1) Démontrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2) Quels sont tous les majorants de $\{0\}$ pour $\preceq$? et tous les minorants ?

6 ★☆ On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation dite “d'ordre lexicographique” :

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff (x_1 < x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2))$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

7 ★★ On considère sur $\mathbb{N}^*$ la relation “divise” définie par :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^* \qquad a \mid b \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \qquad b = ak$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Cet ordre est-il partiel ou total ?
2) On pose $A = \{2, 3, 5\}$. Justifier que A est bornée, mais ne possède ni maximum, ni minimum.
3) Que doit vérifier $M \in \mathbb{N}^*$ pour être un majorant de A ? Quel est le plus petit des majorants de A ?

8 ★★☆ Soit $\preceq$ la relation binaire sur $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \preceq z' \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad z' = z^{2^n}$$

1) Montrer que $\preceq$ est réflexive et transitive.
2) Est-ce que $\preceq$ est une relation d'ordre ?
3) Reprendre les questions précédentes en définissant $\preceq$ sur $\mathbb{R}$.

9 ★★★ Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive définie sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S}$ sur E par :

$$x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x)$$

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence. On note F l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.
2) On définit la relation $\mathcal{T}$ sur F par : $\forall X, Y \in F \quad X\mathcal{T}Y \iff (\exists (x,y) \in X \times Y \quad x\mathcal{R}y)$. Montrer que $\mathcal{T}$ définit une relation d'ordre.